760. Banach 空間ニ於ケル positive Operation II

角谷　静夫（阪大）

次ニ complex Banach 空間 $E(i) = E + iE$ ヲ考ヘル。

$E(i)$ ノ一般ノ element z ハ $z = x + iy$, $x, y \in E$ ト云フ形デアル。任意ノ $z \in E(i)$ 及ビ $\lambda = \alpha + i\beta$ (α, β : real) ニ對シテ $\lambda z = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$ ニヨッテ λz ヲ定義スル.

次ニ、E ニハ既ニ semi-order ガ定義サレタトシテ、E(i)

ニ於ケル semi-order ヲ次ノ如ク定義スル：$z=x+iy$, $z'=x'+iy'$ ニ對シテ $z \leqq z'$ ト云フノハ $x \leqq x'$, $y \leqq y'$ が同時ニ成立スルトキデアル ト定義スル。$z < z'$ トナルノハ $x \leqq x'$, $y < y'$ 又ハ $x < x'$, $y \leqq y'$ トナルトキデアル。

更ニ $z \ll z'$ ハ $x \leqq x'$, $y \ll y'$ 又ハ $x \ll x'$, $y \leqq y'$ ナルトキト定義スル。$x \ll x'$, $y \ll y'$ ナルトキハ $z \lll z'$ ト書クコトニスル。

今 T ヲ E ニ於ケル linear operator トスレバ $Tz \equiv T(x+iy) = Tx+iTy$ ハ $E(i)$ ニ於ケル (real) linear operator デアル。

以下ニ於テハ $E(i)$ ニ於ケル linear operator ハイツモ、カヽルモノヲ考ヘルコトニスル。コレハ明カニ $T(\lambda z) = \lambda T(z)$ ヲ満足スル T が (strongly) positive ナルトキ、T ハ又 $E(i)$ ノ operator トシテ (strongly) positive ニナル。

次ニ $E(i)$ ニ於ケル operator トシテノ T ノ固有値（一般ニハ complex valued）ヲ論ジルワケデアルが、コノタメニハ $z=x+iy$ ニ對シテソノ"絶対値"$|z|$ ヲ定義スルコトが便宜デアル。[1]

---

(1) E が実数値ノ函数ノ空間トシテ與ヘラレルトキハ $E(i)$ ハ複素数値ノ函数ノ空間トナルカラ、ソノ"絶対値"ハ普通ノ様ニ定義出来ルガ一般ノ場合ニハサウハ行カナイ。

$|z|$ ハ絶對値ト云ッテモ實ハ E ノ element デアル。

$|z|$ ヲ定義スルタメニハ E ノ semi-order ニ關シテ、少シ假定ヲ加ヘル必要ガアル。以下ニ述ベル假定 (1), (2) ハ何レモ大概ノ場合ニ假定サレテヰルモノデアル。[2]

$\boxed{\text{假定}}$ (1) 任意ノ $x \in E$, $y \in E$ ニ對シテ $x \leqq u$, $y \leqq u$ ナル如キ $u \in E$ ガ存在スル。

(2) E ノ部分集合 $\mathfrak{M}$ ニ對シテ、モシ $x \leqq u$ ガスベテノ $x \in \mathfrak{M}$ ニ對シテ成立スル如キ $u \in E$ ガ存在スレバ、カカル u ノウチニテ最小ノモノガアル。即チ $u_0 \in E$ ガ存在シテスベテノ $x \in \mathfrak{M}$ ニ對シテ $x \leqq u_0$ トナリ、シカモ、スベテノ $x \in \mathfrak{M}$ ニ對シテ $x \leqq u$ トナル如キ任意ノ $u \in E$ ニ對シテ $u_0 \leqq u$ トナル。コノ u_0 ノコトヲ $\underset{x \in \mathfrak{M}}{l.u.b.}(x)$ ト書ク。

特ニ $\mathfrak{M}$ ガ二ツノ element x, y ヨリ成ルトキハ (1) ニヨリ $x \leqq u$, $y \leqq u$ ナル $u \in E$ ガ存在スルカラ $l.u.b.(x, y)$ ガ存在スル. コレヲ $\max(x, y)$ ト書ク。

---

(2) 例ヘバ J. v. Neumann ノ continuous geometry ニ於ケルガ如シ。

又一般ノ semi-ordered linear space ニ關シテハ次ノ二ツノ論文ヲ參照サレタイ。

H. Freudenthal: Teilweise geordnete Moduln, Proc. Acad. Amsterdam, 39 (1936).

L. Kantorovitch: Lineare halbgeordnete Räume, Recueil Math., 2(44)-1. (1937).

$\boxed{\text{定義}}$ 任意ノ $z = x + iy \in E(i)$ ニ對シテ

$$|z| = \underset{\alpha^2+\beta^2=1}{l.u.b.}(\alpha x - \beta y)$$

トオク。但シ l.u.b. ハ $\alpha^2+\beta^2=1$ ナルアラユル實數ノ組 (α, β) ニ對シテトルモノトスル。$\alpha x - \beta y$ ハ $(\alpha + i\beta)(x+iy)$ ノ real part デアルカラ $|z| = \underset{|\theta|=1}{l.u.b.}\,\mathcal{R}(\theta z)$ ト考ヘルコトガ出來ル。コヽニ $\mathcal{R}$ ハ real part ヲ表ハシ θ ハ絶對値1ノアラユル complex number ヲウゴクモノトスル。

コノ定義ガ可能デアルタメニハ $\alpha x - \beta y \leqq u$ ガスベテノ $\alpha^2+\beta^2=1$ ナル實數ノ組 (α,β) ニ對シテ成立スル如キ $u \in E$ ガ存在シナケレバナラナイ。實際 $u = \max(x, -x) + \max(y, -y)$ トオケバコレガ求ムル u デアル。

次ニコノ $|z|$ ノ性質ヲ調ベル。先ヅ任意ノ complex number λ ニ對シテ

(1) $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$

トナルコトハ殆ド明カデアル。

何トナレバ $|\lambda z| = \underset{|\theta|=1}{l.u.b.}\,\mathcal{R}(\theta\lambda z) = \underset{|\theta|=1}{l.u.b.}\,\mathcal{R}(\theta|\lambda|z)$

$= |\lambda| \cdot \underset{|\theta|=1}{l.u.b.}\,\mathcal{R}(\theta z) = |\lambda|\cdot|z|$.

次ニ

(2) $|z| \geqq 0$

トナルコトハ $|z| \geqq x$ $(\alpha=1,\ \beta=0)$, $|z| \geqq -x$ $(\alpha=-1,\ \beta=0)$ ヨリ $2|z| \geqq x + (-x) = 0$ ヲ得ルコトカラワカル。又

(3) $|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|$

トナルコトモ容易ニワカル。實際 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ トスレバ $\alpha^2+\beta^2=1$ ナル任意ノ α,β ニ對シテ $\alpha(x_1+x_2)-\beta(y_1+y_2)=(\alpha x_1-\beta y_1)+(\alpha x_2-\beta y_2)\leqq|z_1|+|z_2|$. ヨツテ l.u.b. ノ定義ヨリ $|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|$ トナル。(3)

更ニ次ノコトモ明ラカデアロウ。

(4) $\theta z\leqq|z|+i|z|$

ガ任意ノ $|\theta|=1$ ナル complex number θ ニ對シテ成立シ、且ツ $|z|+i|z|$ ハカヽル性質ヲモツモノノウチニテ最小デアル。即チ $E(i)$ ニ於ケル semi-order ノイミデ

$$\underset{|\theta|=1}{\text{l.u.b.}}(\theta z)=|z|+i|z|\ \text{デアル。}$$

最後ニ z ガ real. 即チ $z=x$ $(y=0)$ ナルトキニハ $|z|=\max(x,-x)$ トナリ. $z=x+icx$, 又ハ $z=cx+iy$, c ハ real const., ナルトキハ $|z|=\sqrt{1+c^2}\cdot|x|=\sqrt{1+c^2}\cdot\max(x,-x)$ トナルコトヲ注意シテオク。

---

(3) コレハ又直接ニ

$$|z_1+z_2|=\underset{|\theta|=1}{\text{l.u.b.}}\,\mathcal{R}(\theta z_1+\theta z_2)$$

$$\leqq\underset{|\theta|=1}{\text{l.u.b.}}\,\mathcal{R}(\theta z_1)+\underset{|\theta|=1}{\text{l.u.b.}}\,\mathcal{R}(\theta z_2)=|z_1|+|z_2|$$

ト計算スルコトモ出來ル。

$\boxed{\text{補助定理 1}}$ Tガ positive operator ナラバ任意ノ $z \in E(i)$ ニ對シテ $T(|z|) \geqq |T(z)|$ トナル。(4)

証明: $\alpha^2+\beta^2=1$ ナル α, β ニ對シテ $T(|z|) \geqq T(\alpha x-\beta y)=\alpha T(x)-\beta T(y)$. ヨッテ

$$T(|z|) \geqq \underset{\alpha^2+\beta^2=1}{l.u.b.}\left(\alpha T(x)-\beta T(y)\right)=|T(x)+iT(y)|$$

$$=|T(z)|.$$

然ラバ $T(|z|)=|T(z)|$ トナルノハ如何ナル場合カ。integral operator ノ場合ヨリ豫想スレバ、コノタメニハ z ノ real part x ト imaginary part y トガ "比例" スルコトガ必要且ツ十分ノ様デアル。シカシコレハ一寸証明ガ困難ノ様デアル。ヨッテ、後ノ議論ニ必要ナ次ノ補助定理ダケヲ証明シテオク。

$\boxed{\text{補助定理 2}}$ Tガ strongly positive ナ linear operator デアレバ $T(z)=\lambda z$, $T(|z|)=|\lambda|\cdot|z|$ トナルノハ λ ガ real positive デ且ツ $z=x+iy$, $x=cy$ (又ハ $y=cx$)(5) c: real const. トナル場合ニ限ル。

---

(4) コレハ real non-negative Kernel $K(x,y)$ ニ對シテ

$$\left|\int f(x)K(x,y)\,dx\right| \leqq \int |f(x)|\,K(x,y)\,dx$$

トナルコトノ擴張デアル。

(5) $y=0$ ナルトキガアルカモ知レナイノデ $y=cx$ ト書キ直シタ。

証明： $\theta z \leqq (1+i)|z|$ ハ任意ノ $|\theta|=1$ ナル complex number θ ニ對シテ成立スル。ヨッテ各々ノ θ ニ對シテ $\theta z \leqq d_\theta(1+i)|z|$ トナル如キ最小ノ const. d_θ ガ定マル。$-1 \leqq d_\theta \leqq 1$ デアル。θ ガアラユル $|\theta|=1$ ヲウゴクトキノ d_θ ノ下限ヲ d_0 トセヨ。$d_{\theta_n} \to d_0$ ナル如キ $\{\theta_n\}$ ガ存在スルカラ、コノ $\{\theta_n\}$ カラ部分列 $\{\theta_{n'}\}$ ヲ選ンデ $\theta_{n'} \to \theta_0$ ナラシメルト $|\theta_0|=1$ ニテ且ツ

(*) $\quad \theta_0 z \leqq d_0(1+i)|z|$

トナル。コノ不等式ハ real part ノ不等式ト imaginary part ノ不等式トニワケテ考ヘルコトガ出來ル。モシ何レノ方モ等号ガ成立シナケレバ T ガ strongly positive デアルト云フコトヨリ

$$T(\theta_0 z) \lll d_0(1+i)\,T(|z|)$$

トナル。トコロガ假定ニヨリ

$$左辺 = \theta_0 T(z) = \theta_0\lambda\cdot z = |\lambda|\cdot\frac{\theta_0\lambda}{|\lambda|}z$$

$$右辺 = d_0(1+i)\cdot|\lambda|\cdot|z|$$

デアルカラ $\theta_0' = \dfrac{\theta_0\lambda}{|\lambda|}$ トオケバ

$$\theta_0' z \lll d_0(1+i)|z|.$$

ヨッテ $\varepsilon > 0$ ヲ十分小サクトレバ

$$\theta_0' z \leqq (d_0 - \varepsilon)(1+i)|z|$$

ガ成立スル。コレハ d_0 ノ定義ニ矛盾スル。ヨッテ (*) ニ於テハ real part 又ハ imaginary part デ等号ガ成立シナケレバナラナイ。ドチラデモ同様デアルカラ

$$\mathcal{R}(\theta_0 z) = d_0|z|$$

トナルモノトシヨウ。コレヨリ λ ガ real ナルコト、及ビコノ real part ト imaginary part トガ比例スルコトヲ証明スル。後者ヲ証明スルニハ $z_1 = \theta_0 z = x_1 + iy_1$ トオイタトキ $y_1 = cx_1$ (又ハ $x_1 = cy_1$) トナルコトヲ示セバヨイ。(6) $T(z_1) = \lambda z_1$, $T(|z_1|) = |\lambda||z_1|$ ハ勿論成立スル。先ヅ上ノ結果ヨリ

$$x_1 = d_0|z_1|.$$

ヨッテ $T(x_1) = d_0 T(|z_1|) = d_0|\lambda|\cdot|z_1| = |\lambda|x_1$. 即チ x_1 ハ $T(x_1) = |\lambda|\cdot x_1$ ヲ満足スル。次ニ λ ガ real ナルコトヲ示スタメ $\lambda = \mu + i\nu$ トオク. $T(z_1) = \lambda z_1$ ヨリ

$$T(x_1) = \mu x_1 - \nu y_1, \quad T(y_1) = \mu y_1 + \nu x_1$$

ヨッテモシ λ ガ real デナケレバ $\nu \neq 0$ デアルカラ

$$y_1 = \frac{1}{\nu}(\mu x_1 - T(x_1)) = \frac{1}{\nu}(\mu x_1 - |\lambda|x_1) = \frac{\mu - |\lambda|}{\nu} x_1.$$

従ッテ

$$T(y_1) = \frac{\mu - |\lambda|}{\nu} T(x_1) = \frac{\mu - |\lambda|}{\nu}\cdot|\lambda|\cdot x_1 = |\lambda|\cdot y_1.$$

故ニ $T(z_1) = T(x_1) + iT(y_1) = |\lambda|x_1 + i|\lambda|y_1 = |\lambda|\cdot z_1$

然ルニ一方 $T(z_1) = \lambda z_1$ ナル故 $\lambda = |\lambda|$. 即チ λ ハ real positive. コレハ λ ガ real デナイ ($\nu \neq 0$) トシタ假

---

(6) $d_0 = 0$ ナルトキハ trivial デアルカラ $d_0 \neq 0$ トスル。

定ニ反スル。

ヨッテ λ ハ real デナケレバナラナイ。λ ガ real ナラバ $\nu=0$ トナリ $T(x_1)=\mu x_1=\lambda x_1$, $T(y_1)=\mu y_1=\lambda y_1$ ヲ得ル。$x_1>0$ 又ハ $x_1<0$ デアルカラ $x_1>0$ ト假定スルコトガ出來ル。λ ガ positive ナルコトハ明カデアル。

ヨッテ $y_1=cx_1$ ナルコトヲ示スニハ次ノ補助定理3ヲ證明スレバヨイ。

$\boxed{\text{補助定理3}}$ (コレハ real Banach 空間ニ於ケル定理) T ガ strongly positive デ且ツ real positive ナ λ ニ對シテ $T(x)=\lambda x$, $T(y)=\lambda y$, $x>0$ ナラバ $y=cx$, c: const. トナル。

證明: T ガ strongly positive ナルコトト $x>0$ ナルコトトヨリ $\lambda x=T(x)\gg 0$. ヨッテ十分大キイ constant d ニ對シテ $y\leqq dx$ トナル。

今 $y\leqq dx$ ガ成立スル如キ最小ノ d ヲ d_0 トセヨ。モシ $y\leqq d_0x$ ニ於テ等号ガ成立シナカッタトスレバ T ガ strongly positive ナルコトヨリ $T(y)\ll d_0T(x)$ 然ルニ假定ヨリ $T(y)=\lambda y$, $T(x)=\lambda x$, $\lambda>0$ ナル故 $y\ll d_0x$.

ヨッテ十分小サイ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $y\leqq(d_0-\varepsilon)x$. コレハ d_0 ノ定義ニ矛盾スル。

定理3. T ガ strongly positive ナ linear operator ナルトキ T ノ proper value (complex valued) ノウチ絶対値最大ノモノガ存在スレバ、ソレハ唯一ツシカ存在セズ、シカモ real, positive デアル。且ツコノ固有値 λ ニ對スル固有要素 z, $z=x+iy$ $(Tz=\lambda z)$ ハ $x=cy$ (又ハ $y=cx$, c: const.) ヲ満足スル。又 λ ハ T ノ simple ナ固有値デアル。

証明: $T(z)=\lambda z$ ヨリ、先ヅ補助定理1ヨリ $T(|z|)\geqq|\lambda|\cdot|z|$.

ヨッテ、今若シコノ式ニ等号ガ成立シナカッタトスレバ T ガ strongly positive ナルコトヨリ $T(T(|z|))\gg|\lambda|T(|z|)$ トナル。即チ $T(x)\geqq(\lambda+\varepsilon)\cdot x$ ナル如キ $x>0$ ガ E 内ニ存在スル。從ッテ, 前号ノ定理2[7]ニヨッテ $\lambda_1\geqq(\lambda+\varepsilon)>|\lambda|$ ナル如キ固有値ガ存在スル筈デアル。コレハ $|\lambda|$ ガ max. デアルト云フ假定ニ反スル。ヨッテ $T(|z|)=|\lambda|\cdot|z|$ トイハネバナラナイ。

スルト補助定理2ガ使ヘルカラ λ ハ real positive トナリ、シカモソノ固有要素 $z=x+iy$ ハ $x=cy$ (又ハ $y=cx$) ヲ満足スル。

最後ニ $T(x)=\lambda x$, $T(y)=x+\lambda y$ ヲ満足スル如キ $x, y\in E$ ガ存在シナイコトハ次ノ様ニスレバワカル。先ヅ $x>0$ ト假定シテヨイコトハ直ニワカル。ヨッテ又 $x\gg0$

(7) 紙上談話會170号, 752, 706頁

デアル。故ニ $y \leqq dx$ トナル如キ d ガ存在スル. カヽル d ノ min. ヲ d_0 トセヨ。

$y \leqq d_0 x$ デアル。ヨッテ $x+\lambda y = T(y) \leqq d_0 T(x) = d_0 \lambda x$. 即チ $\lambda y \leqq (d_0\lambda - 1)x$. $\lambda > 0$ ナル故 $y \leqq (d_0 - \frac{1}{\lambda})x$. コレハ d_0 ガ min. トイフコトニ矛盾スル。